

Analyse Topologique de systèmes chaotiques faiblement dissipatifs: applications aux attracteurs *Lorenz* – 84 et *cereal crops*

Sylvain Mangiarotti^{†‡}

[†] Centre d'Études Spatiales de la Biosphère, CNRS-UPS-CNES-IRD,
Observatoire Midi-Pyrénées, 18 avenue Édouard Belin, 31401 Toulouse, France and

[‡] Joint International Lab Télédétection et Ressources en Eaux en Méditerranée semi-Aride,
IRD-Université Cadi Ayyad de Marrakech, Faculté des Sciences Semlalia, BP 2390 Marrakech, Maroc

(Dated: May 13, 2013)

Appliquée à la la dynamique des cultures céréalière en zone semi-aride sur la base de mesures de réflectance issues de la télédétection spatiale, la modélisation globale a récemment permis d'obtenir des modèles chaotiques dont les attracteurs présentent une structure complexe pour laquelle il n'existe que peu d'exemples théoriques et aucun directement issus d'observations. On se propose dans la présente étude de montrer qu'il s'agit d'un nouvel attracteur. Apporter une telle preuve nécessite de satisfaire à des critères précis [1] qui requièrent l'extraction de la structure topologique de l'attracteur. Ce type d'analyse est difficile à appliquer à des systèmes faiblement dissipatifs comme celui obtenu ici. On introduit donc dans la présente étude une approche de suivi de trajectoire par traceur coloré permettant d'extraire la structure topologique (le gabarit) du présent attracteur et l'on montre que sa structure est différente de l'attracteur faiblement dissipatif découvert par Lorenz en 1984 [2].

I. INTRODUCTION

Basée sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, la modélisation globale [3, 4] permet de s'intéresser aux comportements dynamiques observés à partir d'un petit nombre de variables (éventuellement une seule), sur la base de séries temporelles courtes. Si l'approche n'a pu être appliquée à ce jour qu'à un petit nombre de cas environnementaux [5, 6], elle n'en présente pas moins un potentiel important pour l'étude du monde réel. Appliquée aux couverts céréalières du nord du Maroc en utilisant des indices de végétation issus de la télédétection spatiale, l'approche a récemment permis d'obtenir un modèle de petite dimension mettant en évidence une dynamique chaotique et faiblement dissipative [7]. Le principal objectif de cette étude est de montrer que l'attracteur chaotique ainsi obtenu est un nouvel attracteur. Pour prouver cela, l'attracteur doit répondre à des critères précis introduits par Letellier & Aguirre [1]: (a) son gabarit (non simplifié) ne doit pas être topologiquement équivalent à un gabarit d'attracteur déjà rapporté; (b) l'attracteur ne doit pas non plus être une version symétrique [8] d'un attracteur connu. Mettre en évidence un nouvel attracteur requiert donc une analyse topologique, c'est-à-dire d'en extraire le gabarit non simplifié. Pour effectuer une telle analyse, une méthode a été introduite [9, 10] qui a pu être appliquée à de nombreux cas. L'approche n'a toutefois pas pu être appliquée à des cas faiblement dissipatifs lesquels requièrent de nouveaux développements.

II. DONNÉES ET AIRES D'ÉTUDE

L'indice de végétation NDVI (Normalized Difference Vegetation Index) issu du Global Inventory Modeling and Mapping Study du centre Global Land Cover Facility [11]

est utilisé pour cette étude sur la période 1982 à 2008. Il s'agit d'un produit bimensuel basse résolution 8×8 km² tiré des capteurs Advanced Very High Resolution Radiometer de la National Oceanic Atmospheric Administration, pour lequel un algorithme de type composite a été appliqué afin de réduire les effets d'interférence atmosphérique et d'angle de vue. Des corrections relatives à la dégradation des capteurs au cours du temps et au contenu en aérosol de l'atmosphère résultant des éruptions volcanique (El Chichon en 1982, Mt Pinatubo en 1991) y sont prises en comptes. L'indice NDVI a montré une bonne efficacité pour le suivi et l'analyse des couverts herbacés et des cultures céréalières des zones semi-arides. L'indice varie de 0.1 pour les couverts éparses et la terre nue jusqu'à 0.9 pour les couverts la fois actifs et denses. Le présent travail concerne une région du Nord du Maroc (de 6.2°W à 5.4°W en longitude et de 34.6°N à 35.4°N en latitude) dont le couvert est principalement composé de cultures céréalières (blés dur et tendre, orge). Afin de ramener le signal à une série temporelle unique et à en réduire le niveau de bruit, les indices sont agrégés spatialement par simple moyennage sur l'aire considérée. La méthode de Savitzky-Golay [12] est utilisée avec une fenêtre de ± 3 mois pour filtrer le signal agrégé et calculer ses dérivées successives, rééchantillonnant le signal à 3 jours.

III. LE MODÈLE DE *Lorenz* – 84

Destiné à modéliser la dynamique grande échelle de l'atmosphère, le modèle suivant a été proposé par Lorenz en 1984 [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF \\ \dot{y} = xy - bxz - y + G \\ \dot{z} = bxy - xz - z \end{cases} \quad (1)$$

Pour la paramétrisation $(a,b,F,G)=(0.25, 4.0, 8.0, 1.0)$ utilisée dans cette étude, le modèle présente une dynamique chaotique. L'attracteur qui en résulte est caractérisé par une structure très enchevêtrée, particulièrement difficile à analyser.

IV. ÉLÉMENTS THÉORIQUES

A. La modélisation globale

La modélisation globale vise à obtenir un jeu d'équations différentielles capable de produire des simulations dont la dynamique est équivalente à la dynamique observée et enregistrée sous forme des séries temporelles [4]. Cette approche s'appuie sur la théorie des systèmes dynamiques qui privilégie l'étude des comportements dans l'espace des phases plutôt que la recherche de solutions analytiques. La puissance de cette théorie provient pour bonne part du fait qu'il est possible d'obtenir une reconstruction d'un portrait équivalent au portrait de phase du système dynamique original — sous jacent aux données — même lorsqu'une seule variable est observée. Cela a pu être exprimé mathématiquement sous la forme d'un théorème [13].

Les premiers travaux de Crutchfield & McNamara [14] ont montré qu'il est possible d'obtenir des jeux d'équations différentielles (ou aux différences) dont la dynamique est équivalente à la dynamique observée. Cela a ensuite pu être vérifié en pratique pour les deux types d'équations [15, 16]. Seules les équations différentielles sont considérées ci-après. La modélisation globale s'appuie sur la possibilité — de principe — de réécrire un jeu original de n équations différentielles ordinaires

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, n \quad (2)$$

sous la forme canonique

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = X_3 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases} \quad (3)$$

où $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une fonction nonlinéaire de la variable X_1 et de ses dérivées successives, X_1 étant reliée au système original par la fonction de mesure nonlinéaire $X_1 = h(\mathbf{x}_i)$. De façon pratique, la modélisation globale vise à obtenir un jeu d'équations du type (3) afin de mieux comprendre la dynamique du système original (2).

Deux algorithmes récents, Polynomial Model Search et Global Modeling (PoMoS & GloMo) [17], spécifiquement développés pour ce type de modélisation ont permis d'obtenir des modèles globaux à partir de séries temporelles d'indices de végétation. PoMoS est basé sur un algorithme d'évolution et vise à identifier la structure d'une fonction polynomiale P capable d'approcher

de façon satisfaisante la fonction F . GloMo s'appuie sur une procédure de Gram-Schmidt pour la paramétrisation précise du polynôme [3]. Les capacités de ces deux algorithmes à obtenir des modèles parsimonieux sont présentées et discutées dans [17].

Appliquée aux deux zones d'étude présentées en Section II, l'approche a permis d'obtenir un attracteur chaotique tridimensionnel dont le portrait de phase est présenté Fig. 1 en même temps qu'une section de Poincaré choisie, et son application de premier retour.

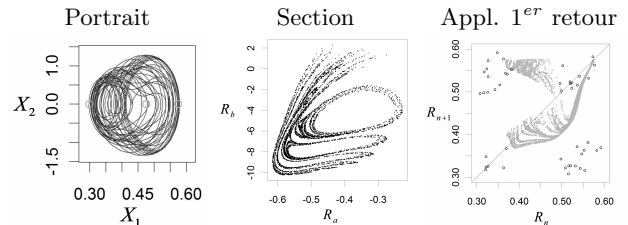


FIG. 1: Portrait de phase, section de Poincaré et application de premier retour de l'attracteur *cereal crops*.

B. L'analyse topologique

Les attracteurs chaotiques sont constitués d'un enchevêtrement complexe de trajectoires difficile à analyser. L'approche topologique vise à recouvrer le squelette autour duquel s'organise les trajectoires de l'attracteur, permettant une description synthétique de l'attracteur aussi bien visuelle qu'algébrique. L'approche topologique constitue un puissant outil par sa robustesse au bruit et sa faible sensibilité aux variations paramétriques [10]. L'approche a permis de caractériser et de classer la plupart des attracteurs chaotiques tridimensionnels, qu'ils soient issus de systèmes théoriques ou de mesures observationnelles.

Le flot d'un attracteur chaotique s'organise autour d'orbites périodiques instables. Chacune de ces orbites périodiques constitue un nœud et l'ensemble des orbites périodiques un entrelac de nœuds. Cet entrelac complexe rend difficile l'extraction du gabarit sous-jacent: une variété branchée et orientée sur laquelle le flot peut être projeté pour fournir une description non ambiguë du flot. Pour remonter à ce gabarit, il est souvent utile de disposer d'une application de premier retour représentative. En effet, une telle application peut permettre d'identifier les principaux éléments du gabarit, notamment le nombre de branches nécessaires à la description de l'attracteur. L'application de premier retour peut aussi permettre de distinguer les mécanismes à l'œuvre [18]. En contexte fortement dissipatif, l'existence d'un tel gabarit est garanti par le théorème de Birman-Williams [19]. Le théorème s'applique facilement aux attracteurs fortement dissipatifs car ceux-ci garantissent la contraction rapide du flot vers la variété stable. Bien que cette existence

reste — en principe — possible en contexte faiblement dissipatif, celle-ci ne peut plus être systématiquement garantie. Mais d'autres éléments peuvent contribuer à rendre l'extraction du gabarit délicate. De tels systèmes ne permettent généralement pas de disposer d'une application de premier retour surjective, rendant ainsi la détection des orbites périodiques et des branches délicate. C'est notamment le cas pour le premier des attracteurs faiblement dissipatifs découvert par Edouard N. Lorenz [2], dont le gabarit n'a, à notre connaissance, pas encore été rapporté.

V. MÉTHODOLOGIE

L'application de premier retour doit être surjective pour permettre de remonter au gabarit de l'attracteur facilement. Dans les cas faiblement dissipatifs, les applications de premier retour affichent non seulement une large épaisseur mais présentent aussi par endroit des branches doubles. Aucune partition simple ne peut donc en être déduite. Cette impossibilité peut provenir de l'anamorphisme complexe des sections de Poincaré reconstruites, n'autorisant pas l'obtention d'une application de premier retour suffisamment simple par projection simple.

Aucune partition n'ayant pu être tirée de l'application de premier retour, il a été choisi de revenir à la section de Poincaré et d'étudier l'application de cette section vers elle-même pour essayer d'y distinguer les différentes branches du flot. L'approche empirique suivante a été utilisée. Une première zone de la section est choisie et découpée. Cette zone est propagée en sens direct jusqu'à obtenir une couverture complète de la section de Poincaré, en éliminant à chaque tour les redondances, définissant ainsi un premier découpage de la section. La zone choisie est ensuite propagée en sens rétrograde conduisant à un second découpage. Le croisement de ces deux découpages fournit une première partition de la section. La zone sélectionnée est alors modulée et le processus de recherche réitéré jusqu'à obtenir un découpage non trivial aussi simple que possible. Pour l'attracteur *cereal crops*, la partition la plus simple a été obtenue à partir d'une zone de la section de Poincaré se distinguant visuellement du reste de la section. La partition a permis de distinguer trois mécanismes distincts: (a) une accumulation progressive de couches caractérisée à la fois par une compaction dans une direction et un étirement dans une direction orthogonale; (b) un double étirement avec déchirement; et (c) un enroulement avec recollement (Fig. 3).

Le mécanisme de double étirement mérite un intérêt tout particulier car spécifique au cas faiblement dissipatif. Le premier se produit dans la direction d'étirement du flot comme on le rencontre classiquement dans les systèmes fortement dissipatifs. Le second se rencontre dans la direction d'enroulement du flot qui correspondait auparavant à la direction de contraction. Ce mécanisme

Sections de Poincaré aux temps $t - 1$, t et $t + 1$

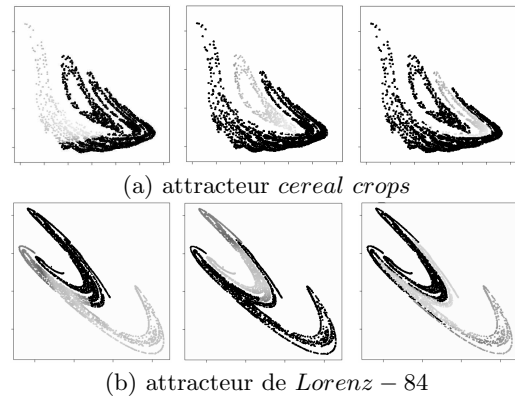


FIG. 2: Application de la section de Poincaré vers elle-même aux temps $t - 1$, t et $t + 1$, pour les attracteurs *cereal crops* (a) et *Lorenz - 84* (b).

n'est rendu possible que par la lenteur de la contraction, laquelle résulte du caractère faiblement dissipatif de l'attracteur. Ce type de contraction est vraisemblablement propre aux attracteurs faiblement dissipatifs et peut se traduire sur le gabarit par un dédoublement de branche dans la direction orthogonale au gabarit. Le repliement est également caractéristique du cas faiblement dissipatif puisqu'il conserve sa structure en couches fines, jusqu'à son recollement, et au-delà.

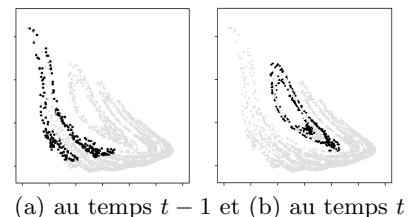
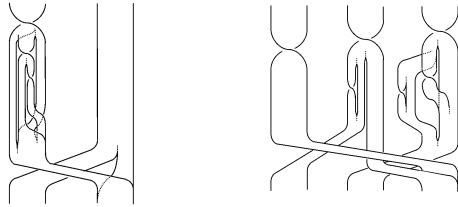


FIG. 3: Sections de Poincaré du modèle *cereal crops*. Les bords de la zone de déchirement sont présentés en noir (a). Une partie vient se replier par enroulement (b)

VI. RESULTATS ET DISCUSSION

En se basant sur la partition de la section de Poincaré expliquée ci-dessus, un gabarit tridimensionnel de l'attracteur *cereal crops* a pu être reconstruit (des sections de Poincaré supplémentaires ont été utilisées pour s'assurer d'avoir bien détecté tous les mécanismes en présence). Ce gabarit a pu être aplani en un gabarit bidimensionnel en autorisant l'émergence de branches dans la direction orthogonale au plan du gabarit et en négligeant les effets liés à l'épaisseur des zones repliées. Bien que cette reconstruction ait pu se faire sans extraire d'orbites périodiques, ces dernières seraient utiles pour vérifier de

façon indépendante le gabarit obtenu, présenté en Fig. 4a. On trouve dans l'attracteur deux branches principales dont l'une présente de nombreuses ramifications conduisant à un total de six branches distinctes. Ainsi aplani, le gabarit ne met pas en évidence la présence d'un espace libre au sein de la plus complexe des deux branches.



(a) attracteur *cereal crops* (b) attracteur *Lorenz - 84*

FIG. 4: Gabarits aplanis obtenus (a) pour l'attracteur *cereal crops* obtenu par solution du modèle globale, et (b) pour l'attracteur de *Lorenz - 84*.

La même approche a pu être appliquée à l'attracteur de *Lorenz - 84*. L'analyse détaillée n'a pas montré de zone de déchirement mais, comme pour l'attracteur *cereal crops*, une région d'étirement bidirectionnel. Comme pour l'attracteur *cereal crops*, un gabarit aplani a pu être développé en faisant émerger une branche dans la direction orthogonale au plan du gabarit. Le gabarit (fig. 4b) présente trois branches principales, deux d'entre elles comportent de nombreuses ramifications conduisant à distinguer au total huit branches. La détection d'un double étirement apparaît spécifique aux attracteurs chaotiques faiblement dissipatifs car rendue possible par l'épaisseur du flot. La présence d'étirements multiples suggère d'affiner le descriptif visuel et algébrique du

gabarit afin de pouvoir rendre compte de ce nouveau type de comportement.

VII. CONCLUSIONS

Une approche basée sur l'application de la section de Poincaré vers elle-même est développée pour l'extraction des gabarits d'attracteurs chaotiques faiblement dissipatifs puis appliquée aux attracteurs *cereal crops*, récemment obtenu par modélisation globale, et *Lorenz - 84*. L'approche permet de mettre en évidence des mécanismes d'étirements multiples spécifiques au contexte faiblement dissipatif, et pouvant être associés à un déchirement. La structure topologique des deux attracteurs a pu être ramenée à des gabarits bidimensionnels révélant des structures topologiques différentes ne pouvant être ramenées l'une à l'autre par symétrie, réunissant ainsi les critères [1] de mise en évidence d'un nouvel attracteur. Les formalismes visuel et algébrique pourraient être utilement affinés afin de les rendre applicables à tout attracteur chaotique faiblement dissipatifs.

Remerciements

Le financement de ce travail a été assuré par le programme Les Enveloppes Fluides et l'Environnement (LEFE), section MANU, de l'Institut National des Sciences de l'Univers (INSU), l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD), le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) et l'Université Paul Sabatier Toulouse III. Les interactions avec le Groupe de Recherche DYnamique et COntôle des Ensembles Complexes (DYCOEC) y ont été particulièrement enrichissantes. Je tiens aussi à remercier C. Letellier pour son aimable relecture du manuscrit.

-
- [1] C. Letellier & L. A. Aguirre, *Physical Review E*, **85**, 036204, 2012.
 - [2] E. N. Lorenz, *Tellus*, **36** (A), 98-110, 1984.
 - [3] G. Gouesbet & C. Letellier, *Physical Review E*, **49** (6), 4955-4972, 1994.
 - [4] C. Letellier, L. A. Aguirre & U. S. Freitas, *Chaos*, **19**, 023103, 2009.
 - [5] C. Letellier, L.A. Aguirre, J. Maquet & R. Gilmore, *Astronomy & Astrophysics*, **449** (1), 379387, 2006.
 - [6] J. Maquet, C. Letellier & L.A. Aguirre, *Mathematical Biology*, **55** (1), 21-39, 2007.
 - [7] Mangiarotti S., Drapeau L., Coudret R., *submitted to Physical Review E*, 2013.
 - [8] R. Gilmore & C. Letellier, *The symmetry of Chaos*, (Oxford University Press, 2007).
 - [9] R. Gilmore & M. Lefranc, *The topology of chaos*, (Wiley, 2002).
 - [10] N. B. Tufillaro, T. Abbott & J. Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, (Addison-Wesley, New York, 1992).
 - [11] C. J. Tucker, J. E. Pinzon, M. E. Brown, D. A. Slayback, E. W. Pak, R. Mahoney, E. F. Vermote & N. E. Saleous, *Int. J. Remote Sensing*, **26**, 4485, 2005.
 - [12] A. Savitzky & M. J. E. Golay, *Analytical Chemistry*, **36** (8), 1627-1639, 1964.
 - [13] F. Takens, *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381, 1981.
 - [14] J. P. Crutchfield & B. S. McNamara, *Complex Systems*, **1**, 417, 1987.
 - [15] L. A. Aguirre & S. A. Billings, *Physica D*, **80** (1,2), 26-40, 1995.
 - [16] C. Letellier, L. Le Sceller, E. Maréchal, P. Dutertre, B. Maheu, G. Gouesbet, Z. Fei & J. L. Hudson, *Physical Review E*, **51** (5), 4262-4266, 1995.
 - [17] S. Mangiarotti, R. Coudret, L. Drapeau & L. Jarlan, *Physical Review E*, **86**, 046205 2012.
 - [18] C. Letellier, E. Roulin & O. E. Röessler, *Chaos, Solitons and Fractals*, **28**, 337360, 2006.
 - [19] J.S. Birman & R.F. Williams, *Topology*, **22** (1), 4782, 1983.